NOMBRES COMPLEXES
DEVOIR DE MAISON
$4^{\text{ème}}$ MATH

Ben fredj sofiane
(Lycée Hammouda Pacha)

Ben Fredj sofiane

Mise à jour : 28 octobre 2012

sofiane.benfradj@planet.net
Version 3.0

EXERCICE 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\textbf{arg}\,(z^2+4) \equiv \textbf{arg}\,(z)[\pi]$$

EXERCICE 2.

(a) Calculer $(2+i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\quad iz^2 - iz + 1 + i = 0$.

On considère l'équation E_θ ou θ est un réel de $[0, 2\pi[$.

$$E_\theta : z^2e^{i\theta} - \Big(1 + (1+i)e^{i\theta}\Big)z + 1 + i = 0$$

(b) Déterminer θ pour que i soit solution de E_θ.

(c) Montrer que pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $1+i$ est une solution de E_θ.

(d) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ)

EXERCICE 3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On donne les points A, B, C et H d'affixes respectives.

$$z_A = 2, \quad z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad z_C = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_H = z_A + z_B + z_C$$

(a) Placer soigneusement les points A, B et C.(On prendra 2cm comme unité graphique.)

(b) Vérifier que $\dfrac{1+e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{1-e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = \dfrac{i}{\textbf{tan}\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$

(c) Calculer $\dfrac{z_H - z_A}{z_B - z_C}$ et $\dfrac{z_H - z_B}{z_A - z_C}$

(d) Déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC puis placer H.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Retour Close

Solutions des Exercices

Exercice 1. Soit z un nombre complexe différent de 0, $-2i$ et $2i$.

$$\textbf{arg}\,(z^4+4) \equiv \textbf{arg}\,(z)[2\pi] \Longleftrightarrow \textbf{arg}\,(z^4+4) - \textbf{arg}\,(z) \equiv 0[2\pi] \Longleftrightarrow \textbf{arg}\left(\frac{z^2+4}{z}\right) \equiv 0[2\pi] \Longleftrightarrow \frac{z^2+4}{z} \in \mathbb{R}^*$$

On pose $z = x + iy$ où (x, y) un couple de réels différent des couples $(0,0), (0,2)$ et $(0,-2)$, on a alors :

$$z + \frac{4}{z} = \frac{(x+iy)^2+4}{x+iy} = \frac{\left((x+iy)^2+4\right)(x-iy)}{x^2+y^2} = x\frac{x^2+y^2+4}{x^2+y^2} + i\left(y\frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned} z+\frac{4}{z} \in \mathbb{R}^* \quad &\Longleftrightarrow \quad \textbf{Im}\left(z+\frac{4}{z}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \textbf{Re}\left(z+\frac{4}{z}\right) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y\frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{et} \quad x\frac{x^2+y^2+4}{x^2+y^2} \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2 = 4 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la réunion du cercle de centre O et de rayon 2 et la droite d'équation $y = 0$ privé des points O et les points A, A' d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Exercice 1

Exercice 2(a)

- $(2+i)^2 = 3+4i$
- Soit Δ le discriminant de l'équation (E), alors $\Delta = i^2 - 4i(1+i) = 3-4i = \overline{(2+i)^2} = (2-i)^2$.
  $2-i$ est alors une racine carré de Δ.
  Les solutions de (E) sont :$z_1 = \dfrac{i+2-i}{2i} = -i$ et $z_2 = \dfrac{i-2+i}{2i} = 1+i$

□

Exercice 2(b) θ étant un réel de $[0, 2\pi[$.

i est une solution de (E_θ) équivaut à $i^2 e^{i\theta} - \left(1 + (1+i)e^{i\theta}\right) i + 1 + i = 0$ équivaut à $-e^{i\theta} - \cancel{i} - (1+i)ie^{i\theta} + 1 + \cancel{i} = 0$ équivaut à $\cancel{-e^{i\theta}} - ie^{i\theta} + \cancel{e^{i\theta}} + 1 = 0$ équivaut à $ie^{i\theta} = 1$ équivaut à $e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = 1$ équivaut à $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$\square$

Ben Fredj
sofiane

Exercice 2(c) Pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, on a :

$$\begin{aligned} z^2 e^{i\theta} - (1+(1+i)e^{i\theta})z + 1 + i &= (1+i)^2 e^{i\theta} - \Big(1+(1+i)e^{i\theta}\Big)(1+i) + 1 + i \\ &= (1+i)^2 e^{i\theta} - (1+i) - (1+i)^2 e^{i\theta} + 1 + i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $1+i$ est une solution de (E_θ) pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$

$\square$

Exercice 2(d)

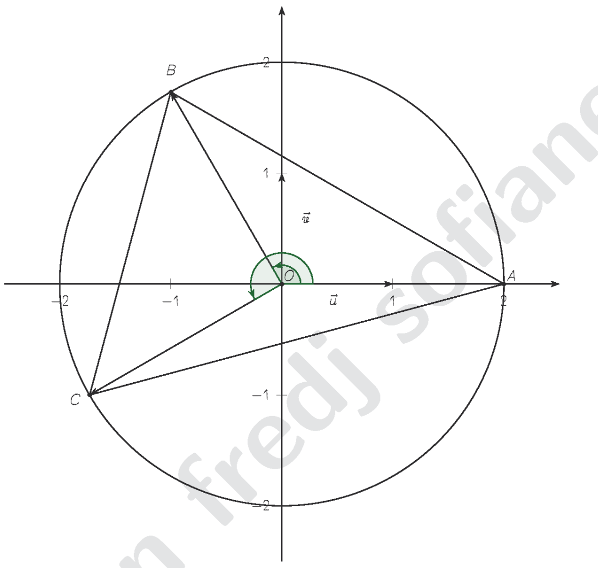
L'équation (E_θ) possède deux solutions complexes $z_1 = 1 + i$ et z_2 telles que

$$z_1 + z_2 = -\frac{-(1 + (1 + i)e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 1 + i \text{ donc } z_2 = e^{-i\theta}.$$

$\square$

Exercice 3(a)

- $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors $OB = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$
- $z_C = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ alors $OC = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC}}) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$



Exercice 3(b)

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)} &= i\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = i\frac{\frac{e^{i\frac{5\pi}{12}}+e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{2}}{\frac{e^{i\frac{5\pi}{12}}-e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{2i}} \\
&= \frac{e^{i\frac{5\pi}{12}}+e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{e^{i\frac{5\pi}{12}}-e^{-i\frac{5\pi}{12}}} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(1+e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(1-e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)} \\
&= \frac{1+e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{1-e^{-i\frac{5\pi}{6}}}
\end{aligned}$$

$\square$

Ben Fredj sofiane

Exercice 3(c)

–

$$\begin{aligned}\frac{z_H - z_A}{z_B - z_C} &= \frac{z_B + z_C}{z_B - z_C}\\ &= \frac{2 + 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{2 - 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}\\ &= \frac{1 + e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{1 - e^{-i\frac{5\pi}{6}}}\\ &= \frac{i}{\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)}\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} &= \frac{z_A + z_C}{z_A - z_C}\\ &= \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}\\ &= \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{5\pi}{6}}}\\ &= \frac{1 + e^{-i\frac{3\pi}{2}}}{1 - e^{-i\frac{3\pi}{2}}}\\ &= \frac{1+i}{1-i} = i\end{aligned}$$

□

Exercice 3(d) D'après la question précédente les rapports $\frac{z_{\overrightarrow{BH}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$ et $\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$ sont imaginaires purs d'où (BH) est perpendiculaire à (AC) et (AH) est perpendiculaire à (BC) donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

H est l'intersection de deux hauteurs du triangle ABC.

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Retour Close